Probabilité que deux nb soient premiers entre eux

$n \geq 1$. r_n la proba pour que deux entiers choisis aléatoirement ds $[\![1,n]\!]^2$ soient p. e. e.
Alors $r_n = \frac{1}{n^2} \sum_{d=1}^{n} \mu(d)\, E\left(\frac{n}{d}\right)^2$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$.

1. On définit $A_n = \{(a,b) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tq } a \wedge b = 1\}$.
$r_n = \frac{\# A_n}{n^2}$.

On note $p_1, \dots, p_k$ les nb premiers $\leq n$, et U_i l'ens des couples $(a,b) \in [\![1,n]\!]^2$ tq $p_i | a$, $p_i | b$.
Alors $A_n = \left(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right)^c$.

Formule du crible : $\left|\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right| = \sum_{I \subset [\![1,k]\!]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i\in I} U_i\right|$.

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i\in I} U_i\right| &= \left|\{(a,b) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tq } p_i | a \text{ et } p_i | b \ \forall i\}\right| \\
&= \left|\{(a,b) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ tq } \prod_{i\in I} p_i | a \text{ et } \prod_{i\in I} p_i | b\}\right| \\
&= \left|\{a \in [\![1,n]\!] \text{ tq } \prod_{i\in I} p_i | a\}\right| \times \left|\{b \in [\![1,n]\!] \text{ tq } \prod_{i\in I} p_i | b\}\right| = E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2.
\end{aligned}$$

Donc $\left|\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right| = \sum_{I \subset [\![1,k]\!]} \underbrace{(-1)^{|I|+1}}_{=-\mu(\prod_{i\in I} p_i)} \underbrace{E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2}_{=0 \text{ si } \prod_{i\in I} p_i > n} = -\sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ \prod_{i\in I} p_i \leq n}} \mu\left(\prod_{i\in I} p_i\right) E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2$

$$= -\sum_{\substack{I \subset [\![1,k]\!] \\ \prod_{i\in I} p_i \leq n}} \mu\left(\prod_i p_i\right) E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i}\right)^2 - \sum_{\substack{I \subset [\![1,k]\!] \\ \prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i} \\ \exists i \text{ tq } \alpha_i > 1 \\ \alpha_i \geq 1}} \underbrace{\mu\left(\prod p_i^{\alpha_i}\right)}_{\substack{\exists i \text{ tq } \alpha_i > 1 \\ =0}} E\left(\frac{n}{\prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i}}\right)^2$$

$= -\sum_{d=2}^{n} \mu(d)\, E\left(\frac{n}{d}\right)^2$. $\quad |A_n| = n^2 - \left|\bigcup_{i=1}^{k} U_i\right| = \mu(1) E\left(\frac{n}{1}\right)^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d)\, E\left(\frac{n}{d}\right)^2$

$|A_n| = \sum_{d=1}^{n} \mu(d)\, E\left(\frac{n}{d}\right)^2$

2. <u>Lemme:</u> $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$

<u>Dém</u>: On note $S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$.

$\cdot\ S(1) = \mu(1) = 1$.

$\cdot\ n \geq 2$. $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$.

$$S(n) = \sum \mu\left(\prod_{\substack{i=1 \\ \beta_i \leq \alpha_i}}^{k} p_i^{\beta_i}\right) = \mu(1) + \sum \mu(p_i) + \sum_{i \neq j} \mu(p_i p_j) + \dots$$

$$= 1 + k \times (-1)^1 + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^i \, 1^{k-i} = (1-1)^k = 0.$$

<u>Retour à la preuve:</u>

$$\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \sim \frac{1}{d^2}$$

$$\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = \left| \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \right) \right|$$

$$E\left(\frac{n}{d}\right) > \frac{n}{d} - 1 \rightsquigarrow \frac{1}{n^2} - \frac{2}{dn} < \frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0$$

D'où $\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| \leq \sum_{d=1}^{n} \underbrace{|\mu(d)|}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 - \frac{1}{d^2} \right|}_{\leq 0}$

$$\leq \sum \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} E\left(\frac{n}{d}\right)^2 \right) \leq \sum \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{d} - 1 \right)^2 \right)$$

$$\leq \sum_{d=1}^{n} \left(\cancel{\frac{1}{d^2}} - \cancel{\frac{1}{d^2}} - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{dn} \right) \leq \sum \frac{2}{dn} - \sum_{d=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

$$\leq \frac{2}{n} \underbrace{\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \right)}_{\sim \ln n} - \frac{1}{n}$$

Donc $\left| r_n - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} \right| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

D'où $\lim_{n\to+\infty} r_n = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$ converge absolument

Il suffit de mq $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = 1$.

$$\sum \frac{\mu(d)}{d^2} \sum \frac{1}{n^2} = \sum_{d,n\geq 1} \frac{\mu(d)}{(dn)^2} = \sum_{\substack{\cancel{p}\geq 1 \\ d|p}} \frac{\mu(d)}{p^2}$$

tous les multiples de d

$$= \sum_{p\geq 1} \sum_{d|p} \frac{\mu(d)}{p^2} = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2} \underbrace{\sum_{d|p} \mu(d)}_{=0 \text{ sauf pour } p=1} = 1 \quad \text{OK}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2} \simeq 0.6.$$